Теоретический минимум
по вычислительной геометрии

для групп параллели C

Летняя компьютерная школа, 2007 г.

Содержание

Обозначения

Будем придерживаться следующих обозначений:

Точки на плоскости: A, B, C, D, ...

Вектора: $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{AB}$, ...

Координаты вектора $\overline{\mathbf{a}}$: $(a_x,\, a_y)$.

Углы: $\angle AOB$.

1 Вектора

Точки и вектора на плоскости задаются парой координат (a_x, a_y).

Расстояние от начала координат до точки $P(x, y)$ легко находится по теореме Пифагора и равно $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Аналогично находится и длина вектора: $|\overline{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Расстояние между двумя точками $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$ вычисляется, как длина вектора $\overline{A_0A_1}$: $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Нормализованным вектором называется вектор единичной длины, сонаправленный данному. Его координаты есть $\left(\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|}\right)$.

1.1 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов $\overline{\mathbf{a}}(a_x, a_y)$ и $\overline{\mathbf{b}}(b_x, b_y)$ определяется как

$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между ними.

Выражение скалярного произведения через координаты: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y$.

Легко видеть, что скалярное произведние линейно по каждому аргументу:

$(\overline{\mathbf{a}+\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$

$(k\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) = k(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}})$.

Аналогичные утверждение верны и для второго аргумента.

Поскольку косинус — четная функция, то скалярное произведение коммутативно: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})$.

Скалярное произведение необходимо использовать, когда нужно проверить два вектора (два отрезка, две прямые) на перпендикулярность, поскольку $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = 0$ тогда и только тогда, когда ненулевые вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами — острый, и отрицательно, если тупой.

1.2 Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух трехмерных векторов $\overline{\mathbf{a}}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{\mathbf{b}}(b_x, b_y, b_z)$ является вектор $\overline{\mathbf{c}}$ с координатами $(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой расположены вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Но мы рассматриваем геометрию на плоскости, поэтому результатом векторного произведения двух векторов, лежащих в плоскости XOY будет вектор, коллинеарный оси OZ, и поэтому его можно представить в виде одного числа — координаты c_z.

Итак, всюду далее под векторным произведением мы будем понимать скалярную величину $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = a_x b_y - a_y b_x$.

Легко видеть, что векторное произведение можно выразить и по-другому:

$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$.

В данном случае φ — ориентированный угол поворота вектора $\overline{\mathbf{a}}$ в сторону вектора $\overline{\mathbf{b}}$, то есть если поворот производится по часовой стрелке, то векторное произведение положительно, а если против часовой стрелки — то отрицательно.

Векторное произведение линейно по каждому аргументу и антикоммутативно: $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = -[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}]$.

Векторное произведение удобно использовать для проверки коллинеарности векторов (прямых, отрезков), поскольку оно равно нулю тогда, и только тогда, когда два вектора коллинеарны.

Если векторное произведение $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ положительно, то вектор $\overline{\mathbf{b}}$ получается из вектора $\overline{\mathbf{a}}$ вращением в положительном направлении (против часовой стрелки), если отрицательно — вращением в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

Также легко видеть, что векторное произведение можно использовать для вычисления площади треугольника:

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right|$$

(можно взять и другие два вектора, составляющие стороны треугольника).

1.3 Угол между векторами

Пусть даны вектора $\overline{\mathbf{a}}(a_x, a_y)$ и $\overline{\mathbf{b}}(b_x, b_y)$. Необходимо вычислить угол между ними.

Мы можем вычислить скалярное и векторное произведение данных векторов, и после этого, поделив на $|\overline{\mathbf{a}}|\cdot|\overline{\mathbf{b}}|$, получить косинус и синус угла между ними соответственно, после чего воспользоваться функциями `asin` и `acos`. Но гораздо удобнее воспользоваться функцией языка программирования `atan2`, которая по двум числам y и x возвращает полярный угол точки (x, y), не требуя дополнительных вызовов функций. Поэтому для нахождения угла между векторами достаточно вызвать $\mathtt{atan2}\Big([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})\Big)$.

2 Прямые

Классическое задание прямой $y = kx + b$ в виде пары чисел (k, b) не употребляется, поскольку таким образом невозможно задать прямую, параллельную оси OY.

Как правило, прямая задается тремя числами (a, b, c), являющимися коэффициентами уравнения

$$ax + by + c = 0.$$

2.1 Нормаль к прямой и направляющий вектор

Рассмотрим прямую $ax+by+c$ и произвольные две точки на этой прямой: $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$. Поскольку $ax_0 + by_0 + c = 0$, $ax_1 + by_1 + c = 0$, то $a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$.

Последнее равенство означает, что вектор $\overline{\mathbf{n}}(a, b)$ ортогонален вектору $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, то есть вектор $\overline{\mathbf{n}}$ ортогонален нашей прямой. Такой вектор называется *нормалью* или *вектором нормали*.

Легко видеть, что вектор $\overline{\mathbf{p}}$ с координатами $(-b, a)$ ортогонален вектору $\overline{\mathbf{n}}$, так как $(\overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{n}}) = -ba+ab = 0$, то есть вектор $\overline{\mathbf{p}}$ параллелен прямой. Такой вектор будем называть направляющим вектором.

Итак, для прямой $ax+by+c$ нормальным вектором является вектор $\overline{\mathbf{n}}(a, b)$, а направляющим — вектор $\overline{\mathbf{p}}(-b, a)$, а также любые вектора, полученные из данных умножением на ненулевое число.

2.2 Задание прямой в параметрическом виде

Пусть дана точка $A_0(x_0, y_0)$ и направляющий вектор $\overline{\mathbf{p}}(p_x, p_y)$. Пусть t — произвольное действительное число, тогда вектор $t\overline{\mathbf{p}}$ коллинеарен вектору $\overline{\mathbf{p}}$, и все точки на прямой можно получить откладывая от точки A_0 вектор $t\overline{\mathbf{p}}$ для всевозможных значений t. Тогда координаты точки $A(x, y)$ будут иметь вид:

$$x(t) = p_x t + x_0,$$
$$y(t) = p_y t + y_0.$$

Такой способ задания прямой, где координаты x и y выражаются, как функции от независимого параметра t называется *параметрическим заданием*.

2.3 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть дана точка $A_0(x_0, y_0)$ и направляющий вектор прямой $\overline{\mathbf{p}}(p_x, p_y)$. Необходимо получить уравнение прямой в каноническом виде $ax + by + c = 0$.

Поскольку направляющий вектор имеет координаты $(-b, a)$, то $a = p_y$, $b = -p_x$. Коэффициент c получим из условия $ax_0 + by_0 + c = 0$, откуда $c = -p_y x_0 + p_x y_0$. Итак, уравнение прямой имеет вид:

$$p_y x - p_x y - p_y x_0 + p_x y_0 = 0.$$

Если даны две точки $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$, то применив предыдущий результат для направляющего вектора $\overline{A_0 A_1}$ получим уравнение прямой:

$$(y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + (y_0 - y_1)x_0 + (x_1 - x_0)y_0 = 0,$$

то есть $a = y_1 - y_0$, $b = x_0 - x_1$, $c = (y_0 - y_1)x_0 + (x_1 - x_0)y_0$.

В параметрическом виде задание прямой будет иметь вид:

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t,$$
$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t.$$

Если величина $t \geqslant 0$, то точка $A(x(t), y(t))$ лежит на луче, выходящем из точки A_0 и проходящем через точку A_1. Если кроме того $t \leqslant 1$, то точка A лежит на отрезке $A_0 A_1$. Если же $t < 0$, то точка A лежит на дополнении луча $A_0 A_1$.

3 Расстояние от точки до прямой

3.1 Прямая, параллельная данной и удаленная на расстояние d

Пусть дана прямая $ax + by + c = 0$. Если изменять значение коэффициента c, зафиксировав при этом значения a и b, то мы получим семейство параллельных прямых. Как получить из этого семейства прямую, параллельную исходной и удаленной от нее на заданное расстояние d?

Вектор нормали к этой прямой будет иметь вид (a, b). Длина этого вектора $\sqrt{a^2+b^2}$. Поделив вектор на его длину, получим вектор $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ единичной длины. Умножив его на d, получим вектор $\left(\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Этот вектор будет нормальным к исходной прямой и его длина равна d. Искомая прямая получается из исходной сдвигом на этот вектор.

Таким образом, если точка (x, y) принадлежала исходной прямой, то точка (x', y'), где $x' = x + \frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y' = y + \frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}$ принадлежит искомой прямой.

Запишем уравнение $ax + by + c = 0$ и подставим в него $x = x' - \frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = y' - \frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}}$, получим уравнение:

$$ax' - \frac{a^2 d}{\sqrt{a^2+b^2}} + by' - \frac{b^2 d}{\sqrt{a^2+b^2}} + c = 0$$

или

$$ax' + by' + c - d\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

Уравнение второй прямой, удаленной на расстояние d от исходной, но в направлении, противоположном нормали, имеет вид:

$$ax' + by' + c + d\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

3.2 Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая $ax + by + c = 0$ и точка (x_0, y_0). Найдем расстояние от этой точки до прямой.

Пусть искомая точка удалена на расстояние d от данной прямой (будем считать, что d может быть отрицательной величиной). Тогда прямая $ax + by + c - d\sqrt{a^2+b^2} = 0$ проходит через точку (x_0, y_0), откуда

$$ax_0 + by_0 + c - d\sqrt{a^2+b^2} = 0$$

Преобразовав, получаем:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В этой формуле величина d может быть отрицательной, поэтому расстояние от точки до прямой равно $|d|$.

Эту формулу необходимо знать наизусть.

4 Точность вычислений

Все действия с действительными числами выполняются приближенно. Поэтому два действительных числа никогда нельзя сравнивать на точное равенство. Мы будем считать два числа равными, если они отличаются не больше, чем на некоторое значение ε. Определение правильного ε — некоторое умение. Для справки: машинная точность вычислений (машинное эпсилон) равно 1.19209e-07 для действительных чисел одинарной точности и 2.22045e-16 для действительных чисел двойной точности.

Итак, если есть два действительных числа x и y, то мы считаем, что
$x = y$, если $|x - y| < \varepsilon$,
$x \neq y$, если $|x - y| > \varepsilon$,
$x < y$, если $x < y - \varepsilon$,
$x \leqslant y$, если $x < y + \varepsilon$,
$x > y$, если $x > y + \varepsilon$,
$x \geqslant y$, если $x > y - \varepsilon$.

5 Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим решение системы из 2 линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на a_{22}, второе — на a_{12}, вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$a_{11}a_{22}x_1 - a_{21}a_{12}x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

откуда

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Домножим первое уравнение на a_{21}, второе на a_{11}, вычтем из второго уравнения первое:

$$a_{11}a_{22}x_2 - a_{21}a_{12}x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

откуда

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

На алгебраическом языке это записывается следующим образом. Определителем (детерминантом) матрицы 2×2 из элементов a, b, c, d называется величина

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Наличие решения у системы линейных уравнений зависит от величины определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

Количество решений системы зависит от значения Δ. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, выраженное формулами, приведенными выше.

Если $\Delta = 0$, то левые части уравнений, составляющих систему пропорциональны. В этом случае система не имеет решений, если $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$ (то есть свободные члены системы не пропорциональны) или имеет бесконечно много решений, если $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

6 Пересечение прямых

6.1 Пересечение прямых, заданных уравнением

Пусть даны две прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$. Точка их пересечения ищется как точка (x, y), удовлетворяющая обоим уравнениям, то есть являющаяся решением системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Данную систему следует решать по формулам, приведенным выше.

6.2 Пересечение прямых, заданных параметрически

Пусть две прямые заданы параметрически:

Уравнения первой прямой:

$$x_1(t_1) = p_{1x}t_1 + x_1,$$
$$y_1(t_1) = p_{1y}t_1 + y_1.$$

Уравнения второй прямой:

$$x_2(t_2) = p_{2x}t_2 + x_2,$$
$$y_2(t_2) = p_{2y}t_2 + y_2.$$

Тогда решением будет точка, задаваемая параметром t_1 на первой прямой и параметром t_2 на второй прямой. Значения параметров удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1(t_1) = x_2(t_2), \\ y_1(t_1) = y_2(t_2). \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} p_{1x}t_1 + x_1 = p_{2x}t_2 + x_2, \\ p_{1y}t_1 + y_1 = p_{2y}t_2 + y_2. \end{cases}$$